Adı Soyadı: 28.05.2019
Numarası:

2018-2019 GÜZ DÖNEMİ CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) $11-4i$ ve $6-7i$ Gauss tam sayılarının obebini bulunuz.

b) $12+i$ Gauss tam sayısını asal çarpanlara ayırınız.

2) a) R birimli bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. J, R halkasının terslenebilen elemanlarının bir kümesi olmak üzere $I \cap J \neq \varnothing$ ise $I = R$ olduğunu gösteriniz.

b) $\mathbb{Z}_2[x]$ halkasında $I = (x^2+\overline{1})$ ideali veriliyor. $\mathbb{Z}_2[x]/I$ bölüm halkasının elemanlarını yazınız ve $\mathbb{Z}_2[x]/I$ halkası cisim olur mu? Belirtiniz.

3) a) $x^5+3x^4+2x^3+x+3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun asal olup olmadığını belirtiniz.

b) R birimli ve değişmeli bir halka ve $f: R \to S$ bir halka epimorfizması olsun. Bu durumda S cisimdir ancak ve ancak $Çek\, f$ maksimal idealdir, gösteriniz.

4) a) R birimli ve değişmeli bir halka, I, R'nin R den farklı bir ideali olsun. $\forall x \in R \setminus I$ için $I + (x) = R$ ise I ideali maksimal idealdir, gösteriniz.

b) $f(x), g(x) \in R[x]$ olsun. $c(f) = c(g) = 1$ ise $c(f.g) = 1$ olduğunu gösteriniz.

5) a) Her Öklid Bölgesinin bir Temel İdeal Bölgesi olduğunu gösteriniz.

b) R halkası sıfır bölensiz ise $R[x]$ halkasının da sıfır bölensiz olduğunu gösteriniz.

Başarılar...

Cevap Anahtarı

1) a) $\dfrac{11-4i}{6-7i}\,(6+7i) = \dfrac{(11-4i)(6+7i)}{36+49}$

$= \dfrac{66+77i-24i+28}{85}$

$= \dfrac{94+53i}{85} \cong 1+i$

$11-4i = (6-7i)(1+i)+k_1$

$11-4i = 6+6i-7i+7+k_1$

$\boxed{-2-3i = k_1}$

$\dfrac{6-7i}{-2-3i}\,(-2+3i) = \dfrac{(6-7i)(-2+3i)}{13} = \dfrac{-12+18i+14i+21}{13}$

$= \dfrac{9+32i}{13} \cong 1+2i$

$6-7i = (-2-3i)(1+2i)+k_2$

$\cancel{6}-7i = -2-4i\cancel{-3i}+\cancel{6}+k_2$

$\boxed{k_2=2}$

$\dfrac{-2-3i}{2} \cong -1-i$

$-2-3i = 2.(-1-i)+k_3$

$-2-3i = -2-2i+k_3$

$\boxed{-i = k_3}$

$\dfrac{2}{-i} = 2i$

$2 = (-i).2i + k_4 \Rightarrow \boxed{k_4 = 0}$

Sonuç:
0'dan önceki en son kalan
Ebob $k_3 = -i$
Aralarında asaldırlar.

b) $\alpha . \beta = 12+i$

$d(\alpha).d(\beta) = d(12+i)$

$d(\alpha).d(\beta) = 145$

$d(\alpha) = 1, 5, 29, 145$

$d(\alpha)=5 \Rightarrow a^2+b^2=5 \Rightarrow \alpha = 2+i$ olsun.

$\dfrac{12+i}{2+i} = \dfrac{(12+i)(2-i)}{5} = \dfrac{25-10i}{5} = 5-2i$ olup

$12+i = (2+i)(5-2i)$ asallarına ayrılmış halidir

2) a) $x^5+3x^4+2x^3+x+3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu için Eisenstein kriteri kullanamayız. O halde

$f(x)=x^5+3x^4+2x^3+x+3$ olmak üzere

$$f(x+1)=(x+1)^5+3(x+1)^4+2(x+1)^3+(x+1)+3$$

$$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1+3x^4+12x^3$$

$$+18x^2+12x+3+2x^3+6x^2+6x+2+x+4$$

$$=x^5+8x^4+24x^3+34x^2+24x+10$$

$p=2$ alınırsa

- $2|10,\ 2|24,\ 2|34,\ 2|24,\ 2|8$
- $2\nmid 1$
- $4\nmid 10$

Eisenstein'a göre $f(x+1)$ $\mathbb{Q}[x]$ de indirgenemez. O halde $f(x)$ de $\mathbb{Q}[x]$ de indirgenemez yani asaldır.

b) $f: R \to S$ epimorfizma ise $f(R)=S$ olup 1. izomorfizma teoremine göre

$$R/_{\text{Çekf}} \cong S$$

$(\Rightarrow)$: S cisimdir. O halde $R/_{\text{Çekf}}$ cisimdir. İlgili teoreme göre Çekf, R de maksimal idealdir.

$(\Leftarrow)$: Çekf, R de maksimal ideal olsun. $R/_{\text{Çekf}}$, ilgili teoreme göre cisimdir. $R/_{\text{Çekf}} \cong S$ olduğundan S cisimdir.

3) a) $I \cap J \neq \emptyset$ ise $\exists a \in I \cap J$ vardır

$\Rightarrow a \in I \wedge a \in J$

$\Rightarrow$ a, terslenebilirdir (J'nin tanımından)

$\Rightarrow a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1_R$ o.ş $a^{-1} \in R$ vardır.

$\Rightarrow \underbrace{a^{-1}}_{\in R} . \underbrace{a}_{\in I} \in I$ (I, R'nin ideali old. 2. koşul)

$\Rightarrow 1_R \in I$ (İdeal halkanın birimini içeriyor ise halkanın kendisine eşit olduğundan)

$\Rightarrow I = R$

b) $\mathbb{Z}_2[x]/I = \{ I, \bar{1}+I, x+I, x+\bar{1}+I \}$

$\mathbb{Z}_2[x]/I$ halkası cisim değildir çünkü $I = (x^2+\bar{1})$ ideali $\mathbb{Z}_2[x]$ de indirgenebilirdir ($f(\bar{1}) = \bar{0}$ olup $\bar{1}$, $f(x) = x^2+\bar{1}$ polinomunun köküdür.)

4) a) $\forall x \in R/I$ için $I + (x) = R$ ise I maksimal idealdir. Gösterelim. Bunun için $I \subsetneq M \subsetneq R$ olacak şekilde bir M idealinin var olduğunu kabul edelim. ve $I = M$ olduğunu gösterelim.

$I \subset M \Rightarrow \exists x \in M \setminus I$ vardır.

$\overset{M \subset R}{\Rightarrow} x \in R \setminus I$

$\Rightarrow I + (x) = R$

$\Rightarrow R \subset M$ olup bu durum $M \subset R$ olması ile çelişir O halde $I = M$ dir

4) b) $c(f)=1$ ve $c(g)=1$ ise $c(fg)=1$ olduğunu gösterelim. Yani f ve $g \in R[x]$ ilkel polinomlar olmak üzere $(f \cdot g)$'nin ilkel olduğunu gösterelim.

$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ve $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ olsun

$\forall i \geq 0$ için $d_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0$ olmak üzere

$f \cdot g = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{m+n} x^{m+n}$ dır.

π, R'nin bir asal elemanı olsun. f ilkel olduğundan a_i lerin ve g ilkel olduğundan b_j lerin bazısı veya bazıları π ile bölünemez. Kabul edelim ki a_i ve b_j, π ile bölünemeyen ilk katsayılar olsun. Bu durumda $\pi \nmid a_i b_j$ dır

$d_{i+j} = a_0 b_{i+j} + \cdots + a_{i-1} b_{j+1} + a_i b_j + a_{i+1} b_{j-1} + \cdots + a_{i+j} b_0$ ve $0 \leq k < i$ için $\pi | a_k$, $0 \leq t < j$ için $\pi | b_t$ olduğundan $\pi | d_{i+j}$ olur. Bu da $\pi | a_i b_j$ olmasını gerektirir π asal olduğundan $\pi | a_i$ veya $\pi | b_j$ olur ki bu durum a_i ve b_j 'nin seçimi ile çelişir. Bu durumda d_k $(k=1,2,\ldots,m+n)$ ların hepsini bölen R'nin bir asal elemanı yoktur. Yani $f \cdot g$ ilkeldir. $c(fg)=1$ dir

5) a) Her E.B 'nin bir T.İ.B olduğunu gösterelim

R keyfi bir E.B ve I, R'nin herhangi bir ideali olsun. $I = (0)$ ise temel ideal olacağından $I \neq (0)$ alalım. I idealinin sıfırdan farklı ve $d(a)$ en küçük tamsayı olacak şekilde bir $a \in I$ alalım. $a \in I \Rightarrow (a) \subset I$ olur

R bir E.B olduğundan $\forall x \in I$ için $x = qa + r$ ve $0 \leq d(r) < d(a)$ olacak şekilde $\exists q, r \in R$ bulunabilir. Fakat $r \neq 0$ ise $r = x - qa \in I$ olduğundan $d(r) < d(a)$ olması a'nın seçimi ile çelişir. O halde $r = 0$ olup $x = qa \in (a)$ bulunur. Buradan $I \subset (a)$ olup $I = (a)$ dır. Yani R'nin her ideali temel ideal olup R bir Temel ideal bölgesidir

R keyfi olduğundan Her E.B bir T.İ.B dir

5 b) R sıfır bölensiz ise $R[x]$ 'in sıfır bölensiz olduğunu gösterelim. Keyfi

$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $(a_m \neq 0)$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ $(b_n \neq 0)$

alalım. O halde $c_{m+n} = a_{m+n}b_0 + \cdots + a_mb_n + \cdots + b_{m+n}$ olur

$i > m$ için $a_i = 0$ ve $j > n$ için $b_j = 0$ olduğundan

$c_{m+n} = a_mb_n$ bulunur R sıfır bölensiz ve $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ ise

$a_mb_n \neq 0$ dır. Yani $c_{m+n} \neq 0$ dır. O halde $R[x]$ den alınan

keyfi $f(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0$ polinomları için $f(x).g(x) \neq 0$

olup $R[x]$ sıfır bölensizdir